

---

# Rozbudowane zadanie z ciągu geometrycznego

Maksymalna liczba punktów: 12 (przykład)

Imię i nazwisko: \_\_\_\_\_

Klasa / Grupa: \_\_\_\_\_

---

WS:	1.1[00]	1.2[00]	1.3[00]	1.4[00]	1.5[00]	1.6[00]	1.7[00]	1.8[00]	1.9[00]	1.10[00]	1.11[00]	1.12[00]	1.13[00]	1.14[00]	1.15[00]
WO:	1.1[00]	2.1[00]	2.2[00]	3.1[00]	3.2[00]	3.3[00]	3.4[00]	4.1[00]	4.2[00]	4.3[00]	4.4[00]				

---

$P_{\text{dział max}} = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, N_{WO}\}, \exists i(j) \in \{1, \dots, N_{WS}^j\}$

---

## Treść zadania

### Zadanie z ciągu geometrycznego (rozszerzone)

Dany jest ciąg geometryczny  $(a_n)$  określony wzorem:

$$a_n = 5 \cdot (-2)^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Wykonaj następujące polecenia:

- 1) Oblicz sumę pierwszych 6 wyrazów ciągu.
- 2) Wyznacz ten wyraz ciągu, który ma wartość  $-80$ .
- 3) Uzasadnij, czy ciąg  $(a_n)$  jest ograniczony z góry lub z dołu (lub oba).
- 4) Przedstaw *graficznie* (punktowo) wartości ciągu dla  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  i opisz jego własności (np. monotoniczność, zmienność znaku).

Każdy WS i WO otrzymuje 1 pkt zgodnie z SO.

- Zadanie 1: Oblicz sumę 6 wyrazów ciągu
  - WS 1.4 [1 pkt]
 

(PP: „Stosuje wzory i własności ciągów geometrycznych”)

    - WO 1.1 [1 pkt]
 

(PP: „Wykonywanie obliczeń na liczbach rzeczywistych”)

*Komentarz: obliczenie sumy ciągu, podstawianie do wzoru.*
    - WO 4.1 [1 pkt]
 

(PP: „Samodzielne uzasadnianie poprawności toku rozumowania”)

*Komentarz: wytłumaczenie, dlaczego wzór na sumę jest prawidłowy.*
- Zadanie 2: Wyznacz wyraz ciągu równy  $-80$ 
  - WS 1.4 [1 pkt]
 

(PP: „Stosuje wyraz ogólny ciągu w zadaniach praktycznych i teoretycznych”)

    - WO 1.1 [1 pkt]
 

(PP: „Rozwiązywanie równań, w szczególności wykładniczych”)

*Komentarz: w tym miejscu występuje równanie  $5 \cdot (-2)^{k-1} = -80$ .*
    - WO 4.2 [1 pkt]
 

(PP: „Dostrzeganie regularności i uogólnianie”)

*Komentarz: zauważenie naprzemiennego znaku wyrazów i postępu geometrycznego.*
- Zadanie 3: Uzasadnij ograniczenie ciągu (lub jego brak)
  - WS 1.4 [1 pkt]
 

(PP: „Analiza monotoniczności i granic ciągów geometrycznych”)

    - WO 4.1 [1 pkt]
 

(PP: „Stosowanie rozumowań dedukcyjnych i dowodów w matematyce”)

*Komentarz: argumentacja dotycząca istnienia/nieistnienia ograniczeń.*
    - WO 4.3 [1 pkt]
 

(PP: „Opracowywanie strategii rozwiązywania problemów”)

*Komentarz: wybór podejścia do badania ograniczoności, np. ilorazu  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ .*
- Zadanie 4: Graficzna reprezentacja ciągu (narysuj punkty)
  - WS 1.4 [1 pkt]
 

(PP: „Prezentowanie zagadnień matematycznych w różnych formach graficznych”)

    - WO 3.1 [1 pkt]
 

(PP: „Stosowanie obiektów matematycznych, np. układu współrzędnych, do opisu sytuacji”)

*Komentarz: narysowanie punktów  $(n, a_n)$  dla określonych  $n$ .*
    - WO 3.2 [1 pkt]
 

(PP: „Interpretowanie wykresów i wyciąganie wniosków z przedstawionych danych”)

*Komentarz: omówienie, jak kształtuje się ciąg (monotoniczność, znak, itp.).*

Suma punktów:

- Zadanie 1:
  - $N_{WS} = 1, w_{s_1} = 1,$
  - $N_{WO}^1 = 2, w_{o_1} = 1, w_{o_2} = 1.$
  - Częściowa punktacja:  $1 \times (1 + 1) = 2$  pkt.
- Zadanie 2:
  - $N_{WS} = 1, w_{s_1} = 1,$
  - $N_{WO}^1 = 2, w_{o_1} = 1, w_{o_2} = 1.$
  - Częściowa punktacja:  $1 \times (1 + 1) = 2$  pkt.
- Zadanie 3:
  - $N_{WS} = 1, w_{s_1} = 1,$
  - $N_{WO}^1 = 2, w_{o_1} = 1, w_{o_2} = 1.$
  - Częściowa punktacja:  $1 \times (1 + 1) = 2$  pkt.
- Zadanie 4:
  - $N_{WS} = 1, w_{s_1} = 1,$
  - $N_{WO}^1 = 2, w_{o_1} = 1, w_{o_2} = 1.$
  - Częściowa punktacja:  $1 \times (1 + 1) = 2$  pkt.

Łącznie:  $2 + 2 + 2 + 2 = \boxed{8}$  pkt.

## Kroki rozwiązania — strukturą drzewiasta (bez pakietu forest)

### title

Cel: Obliczyć  $S_6 = a_1 + a_2 + \dots + a_6$ .

- **WS 1.4 [2 pkt]**: Stosuje wzory na ciągi geometryczne (szczegół).
  - ☒ **WO 1.1 [2 pkt]**:
    - ◊ **WOg(Prec)**:

$$\text{Obliczenia sumy: } S_6 = a_1 \cdot \frac{1 - q^6}{1 - q}, \quad a_1 = 5, \quad q = -2.$$

- **WS 1.4 [1 pkt]**: Uzasadnienie poprawności wzoru.
  - ☒ **WO 4.1 [1 pkt]**:
    - ◊ **WOg(Prec)**: Zastosowany został standardowy wzór na sumę ciągu geometrycznego,  $S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$ .

### title

Cel: Rozwiązać równanie  $a_k = -80$ .

- **WS 1.4 [2 pkt]**: Wykorzystanie wzoru na wyraz ogólny.
  - ☒ **WO 1.1 [2 pkt]**:
    - ◊ **WOg(Prec)**:

$$a_k = 5 \cdot (-2)^{k-1} = -80. \quad \Rightarrow \quad (-2)^{k-1} = -\frac{80}{5} = -16.$$

Należy znaleźć  $k$  takie, że  $(-2)^{k-1} = -16$ .

- **WS 1.4 [1 pkt]**: Dostrzeżenie regularności zmian znaku ciągu.
  - ☒ **WO 4.2 [1 pkt]**:
    - ◊ **WOg(Prec)**: Każdy kolejny wyraz mnożymy przez  $-2$ .  $-16$  to  $(-2)^4$  z minusem w „środku”:

$$(-2)^4 = 16, \quad (-2)^5 = -32, \quad (-2)^3 = -8, \dots$$

Zatem  $k - 1 = 4$  i  $k = 5$  (sprawdź znak!).

### title

**Cel:** Sprawdzić, czy  $(a_n)$  jest ograniczony.

- **WS 1.4 [2 pkt]:** Analiza wielkości wyrazów.

- ☒ **WO 4.1 [2 pkt]:**

- ◊ **W<sub>Og(Prec)</sub>:**

$$|a_n| = |5 \cdot (-2)^{n-1}| = 5 \cdot 2^{n-1},$$

co *rośnie* wraz z  $n$ . Zatem nie jest ograniczony z góry.

- **WS 1.4 [1 pkt]:** Strategia dowodzenia (gdzie występuje ograniczenie).

- ☒ **WO 4.3 [1 pkt]:**

- ◊ **W<sub>Og(Prec)</sub>:** Ponieważ wyrazy mają naprzemienny znak (+/-), w jed-nych krokach są dodatnie i rosną *wartościowo*, w innych ujemne (o coraz większej wartości bezwzględnej). Ciąg *nie jest* ograniczony ani z góry, ani z dołu (wartości ujemne też rosnąco *maleją*).

### title

**Cel:** Narysować punkty  $(n, a_n)$  i zinterpretować.

- **WS 1.4 [2 pkt]:** Wykres punktowy (obiekt matematyczny).

- ☒ **WO 3.1 [2 pkt]:**

- ◊ **W<sub>Og(Prec)</sub>:** Nanosimy na płaszczyznę punkty:

$$(1, 5), (2, -10), (3, 20), (4, -40), (5, 80), (6, -160).$$

- **WS 1.4 [1 pkt]:** Interpretacja reprezentacji (monotoniczność, tendencje).

- ☒ **WO 3.2 [1 pkt]:**

- ◊ **W<sub>Og(Prec)</sub>:** Widzimy naprzemienne przejścia przez wartości dodatnie i ujemne, przy czym  $|a_n|$  rośnie dwukrotnie z każdym krokiem.

## Uwagi końcowe (przykładowe obliczenia)

- $S_6$  można wyliczyć:

$$S_6 = 5 \cdot \frac{1 - (-2)^6}{1 - (-2)} = 5 \cdot \frac{1 - 64}{1 + 2} = 5 \cdot \frac{-63}{3} = 5 \cdot (-21) = -105.$$

- Warunek  $a_k = -80$  daje  $k = 5$  (warto sprawdzić znak).
- $|a_n|$  rośnie wykładniczo, więc ciąg nie jest ograniczony.
- Wykres: punkty „skaczą” raz w dół, raz w górę, z rozwijającą się wartością bezwzględną.