

Autor: MM, JG
Przedmiot: Matematyka
Poziom nauczania: Liceum
Zakres: Podstawowy

Treść zadania

Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi:

$$n^2 \equiv 0 \quad \text{lub} \quad n^2 \equiv 1 \pmod{4}.$$

(Innymi słowy, kwadrat każdej liczby całkowitej po podzieleniu przez 4 daje resztę 0 lub 1.)

Realizowane Wymagania Szczegółowe (WS)

- **WS1:** Przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia.

Wymagania ogólne (WG) podlegające ocenie

- **W1.1:** Sprawność rachunkowa (wykonywanie obliczeń oraz stosowanie praw działań matematycznych).
- **W2.2:** Wykorzystanie i tworzenie informacji (używanie języka matematycznego do opisu rozumowań i uzasadniania wniosków).
- **W3.1:** Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi).
- **W4.1:** Rozumowanie i argumentacja (przeprowadzanie rozumowań oraz uzasadnianie poprawności rozwiązań).

Rozwiązanie

Krok 1: Uogólnienie liczby całkowitej.

Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą. Możemy zapisać:

$$n = 2k \quad (\text{dla } n \text{ parzystego}) \quad \text{lub} \quad n = 2k + 1 \quad (\text{dla } n \text{ nieparzystego}),$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

*Realizacja wymagań: **W3.1, W2.2.***

Krok 2: Rozpatrzenie przypadku $n = 2k$.

Dla $n = 2k$ mamy:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2.$$

Skoro $4k^2$ jest podzielne przez 4, to:

$$n^2 \equiv 0 \pmod{4}.$$

*Realizacja wymagań: **W1.1, W4.1.***

Krok 3: Rozpatrzenie przypadku $n = 2k + 1$.

Dla $n = 2k + 1$ mamy:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1.$$

Skoro $4(k^2 + k)$ jest podzielne przez 4, to:

$$n^2 \equiv 1 \pmod{4}.$$

*Realizacja wymagań: **W1.1, W4.1.***

Krok 4: Wniosek końcowy.

Z rozpatrzenia obu przypadków wynika, że:

$$n^2 \equiv 0 \quad \text{lub} \quad n^2 \equiv 1 \pmod{4}.$$

*Realizacja wymagań: **W4.1, W2.2.***

Podsumowanie oceny

Wymaganie	Liczba wystąpień	Waga przy wystąpieniu	Łącznie punktów
W1.1	2	0.5	1
W2.2	2	0.5	1
W3.1	1	1	1
W4.1	3	0.33	1

Table 1: Waga i procentowy udział poszczególnych wymagań w zadaniu.

Ocena końcowa: Ocena jest ustalana na podstawie procentowej realizacji wymagań ogólnych. Aby uzyskać daną ocenę, uczeń musi spełnić określoną liczbę punktów w systemie WO, zgodnie z poniższą klasyfikacją:

- 1. Ocena 6 (celująca)** – spełnione co najmniej 95% wymagań ogólnych na 95% na %.

2. Ocena 5 (**bardzo dobra**) – spełnione co najmniej 80% na 80%.
3. Ocena 4 (**dobra**) – spełnione co najmniej 65% na 65%.
4. Ocena 3 (**dostateczna**) – spełnione co najmniej 50% na 50%.
5. Ocena 2 (**dopuszczająca**) – spełnione co najmniej 30% na 30%.
6. Ocena 1 (**niedostateczna**) – niespełnienie żadnego z powyższych warunków.